

# 对勒洛三角形性质的探究与推广

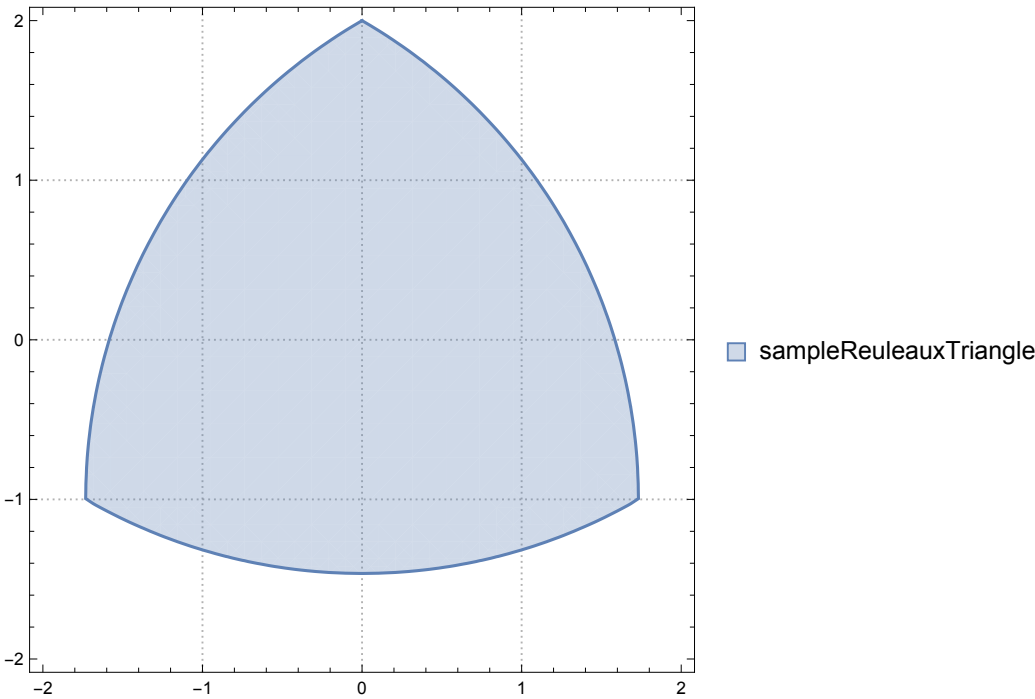
华南师范大学附属中学 高一（6）班 潘维恒 0623

## 勒洛三角形

### 定义

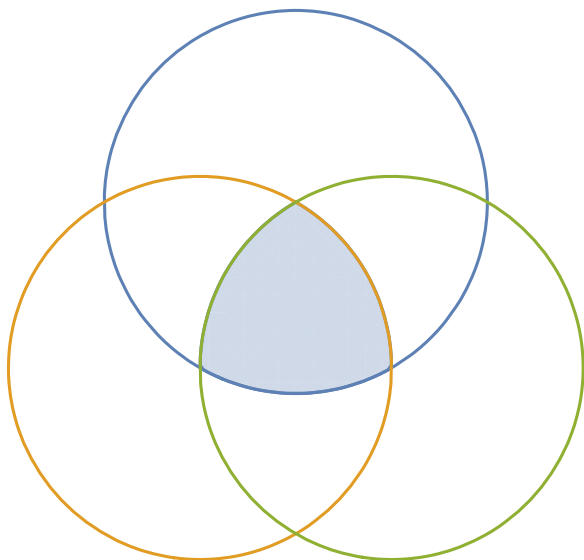
勒洛三角形（Reuleaux triangle）由三条等半径的圆弧所构成，是一种等宽曲线（curve of constant width），即满足用任意两条互异平行线夹一个勒洛三角形，使两条平行线在不同的位置与之相切，则这两条平行线间的距离为定值。

```
In[13]:= sampleReuleauxTriangle =  
       $x^2 + (y - 2)^2 \leq 12 \ \&\& \ (x + \sqrt{3})^2 + (y + 1)^2 \leq 12 \ \&\& \ (x - \sqrt{3})^2 + (y + 1)^2 \leq 12$   
Out[13]=  $x^2 + (-2 + y)^2 \leq 12 \ \&\& \ (\sqrt{3} + x)^2 + (1 + y)^2 \leq 12 \ \&\& \ (-\sqrt{3} + x)^2 + (1 + y)^2 \leq 12$   
  
RegionPlot[sampleReuleauxTriangle, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotTheme -> "Detailed"]
```



上图为一个中心位于(0,0)，每条圆弧半径为 $2\sqrt{3}$ 的勒洛三角形。构造方法为取三个包含圆及其内所有点的集合的交集。

```
Show[RegionPlot[sampleReuleauxTriangle, {x, -6, 6}, {y, -6, 6}],
ContourPlot[{x^2 + (y - 2)^2 == 12, (x + Sqrt[3])^2 + (y + 1)^2 == 12, (x - Sqrt[3])^2 + (y + 1)^2 == 12},
{x, -6, 6}, {y, -6, 6}], Frame -> None]
```

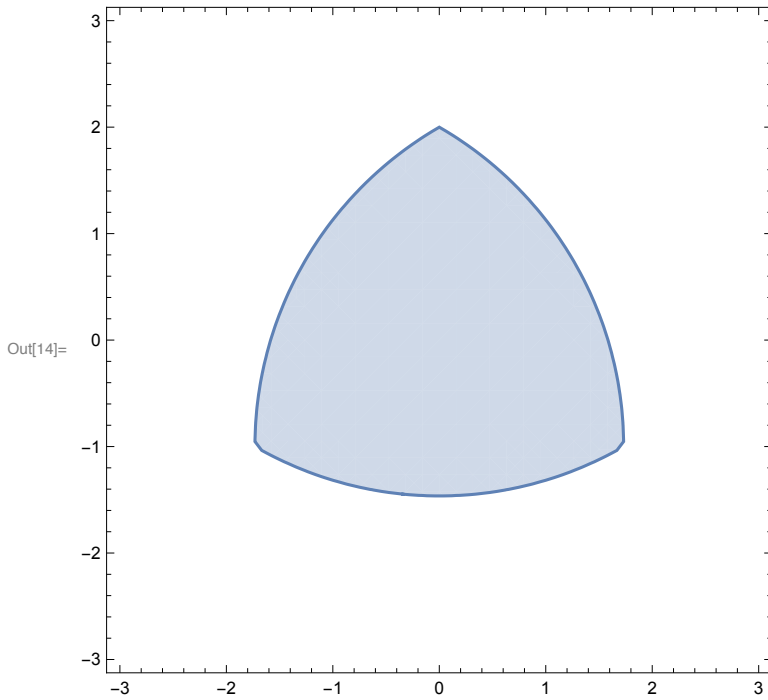


上文所提到的勒洛三角形的构造方法。

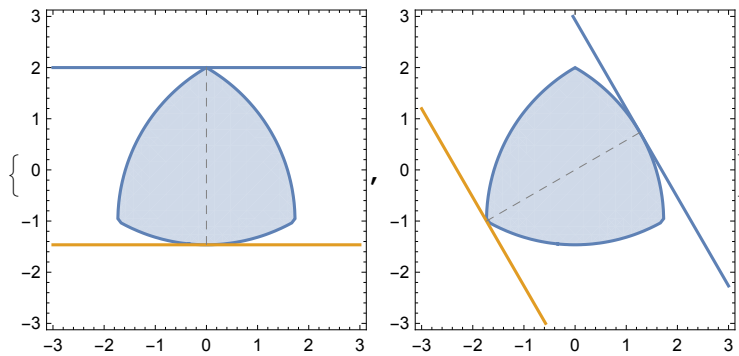
## 性质与应用

勒洛三角形的构造方法很简单，也有很多优美的性质。

```
In[14]:= normalPlot = RegionPlot[sampleReuleauxTriangle, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
```

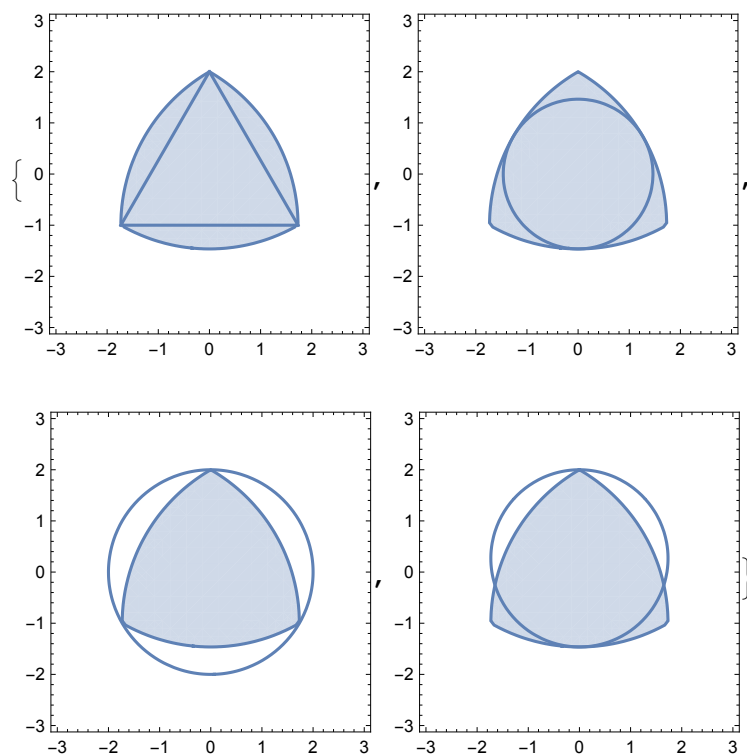


```
{Show[normalPlot, ContourPlot[{y == 2, y == 2 - 2 Sqrt[3]}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}],  
Graphics[{Gray, Dashed, Line[{0, 2}, {0, 2 - 2 Sqrt[3]}]}]}, Show[normalPlot,  
ContourPlot[{y == (4 Sqrt[3] - 4) - Sqrt[3] x, y == -4 - Sqrt[3] x}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}],  
Graphics[{Gray, Dashed, Line[{(-Sqrt[3], -1), {3 - Sqrt[3], Sqrt[3] - 1}]}]}]}
```



平面内一封闭曲线，若满足用平面上任意两平行线所夹之时，两平行线之间的距离为定值，则称其为定宽曲线。勒洛三角形显然满足这个性质：其宽度恒为三条圆弧的半径之长。

```
{Show[normalPlot, Plot[-1, {x, -√3, √3}],
  Plot[2 - √3 x, {x, 0, √3}], Plot[2 + √3 x, {x, -√3, 0}]]],
Show[normalPlot, ContourPlot[x² + y² == (2√3 - 2)², {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]],
Show[normalPlot, ContourPlot[x² + y² == 4, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]],
Show[normalPlot, ContourPlot[x² + (y - (2 - √3))² == 3, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]]}]
```



勒洛三角形的内切正三角形、内切圆、外接圆、等宽圆。

```

In[1]:= r = 1.5;

angle[vec_] := Arg[First[vec] + I * Last[vec]] + If[Last[vec] ≥ 0, 0, 2 * Pi]

arc[pt_, t_] := pt + r * {Cos[t], Sin[t]}

test[vec_, t_] := angle[vec] ≤ t && t ≤ Pi / 3 + angle[vec]

pt1[t_] := r * Piecewise[{
  {{t, 1}, 0 ≤ t ≤ Pi / 3},
  {{Pi / 3, 0} + RotationMatrix[Pi / 3 - t].{0, 1}, Pi / 3 < t ≤ 2 Pi / 3},
  {{t - Pi / 3, 1} + RotationMatrix[Pi - t].{0, -1}, 2 Pi / 3 < t && t ≤ Pi},
  {{2 Pi / 3, 0}, Pi ≤ t && t < 4 Pi / 3},
  {{t - 2 Pi / 3, 1} + RotationMatrix[4 Pi / 3 - t].{0, -1},
    4 Pi / 3 < t && t ≤ 5 Pi / 3},
  {{Pi, 0} + RotationMatrix[2 Pi - t].{0, 1}, 5 Pi / 3 < t && t ≤ 2 Pi}
}];

pt2[t_] := r * Piecewise[{
  {{t, 1} + RotationMatrix[-t].{0, -1}, 0 ≤ t ≤ Pi / 3},
  {{Pi / 3, 0} + RotationMatrix[2 Pi / 3 - t].{0, 1}, Pi / 3 < t ≤ 2 Pi / 3},
  {{t - Pi / 3, 1}, 2 Pi / 3 < t && t ≤ Pi},
  {{2 Pi / 3, 0} + RotationMatrix[Pi - t].{0, 1}, Pi < t && t ≤ 4 Pi / 3},
  {{t - 2 Pi / 3, 1} + RotationMatrix[5 Pi / 3 - t].{0, -1},
    4 Pi / 3 < t && t ≤ 5 Pi / 3},
  {{Pi, 0}, 5 Pi / 3 < t && t ≤ 2 Pi}
}];

pt3[t_] := r * Piecewise[{
  {{t, 1} + RotationMatrix[Pi / 3 - t].{0, -1}, 0 ≤ t ≤ Pi / 3},
  {{Pi / 3, 0}, Pi / 3 < t ≤ 2 Pi / 3},
  {{t - Pi / 3, 1} + RotationMatrix[2 Pi / 3 - t].{0, -1}, 2 Pi / 3 < t && t ≤ Pi},
  {{2 Pi / 3, 0} + RotationMatrix[4 Pi / 3 - t].{0, 1}, Pi < t && t ≤ 4 Pi / 3},
  {{t - 2 Pi / 3, 1}, 4 Pi / 3 < t && t ≤ 5 Pi / 3},
  {{Pi, 0} + RotationMatrix[5 Pi / 3 - t].{0, 1}, 5 Pi / 3 < t && t ≤ 2 Pi}
}];

center[t_] := Mean[{pt1[t], pt2[t], pt3[t]}];

reuleaux[a_, b_, c_, t_] := Piecewise[{
  {arc[a, t], test[b - a, t]},
  {arc[b, t], test[c - b, t]},
  {arc[c, t], test[a - c, t]}];

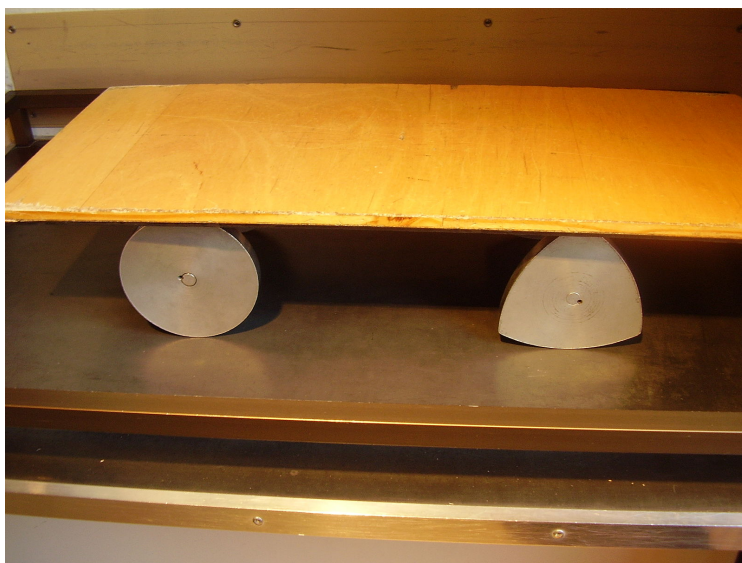
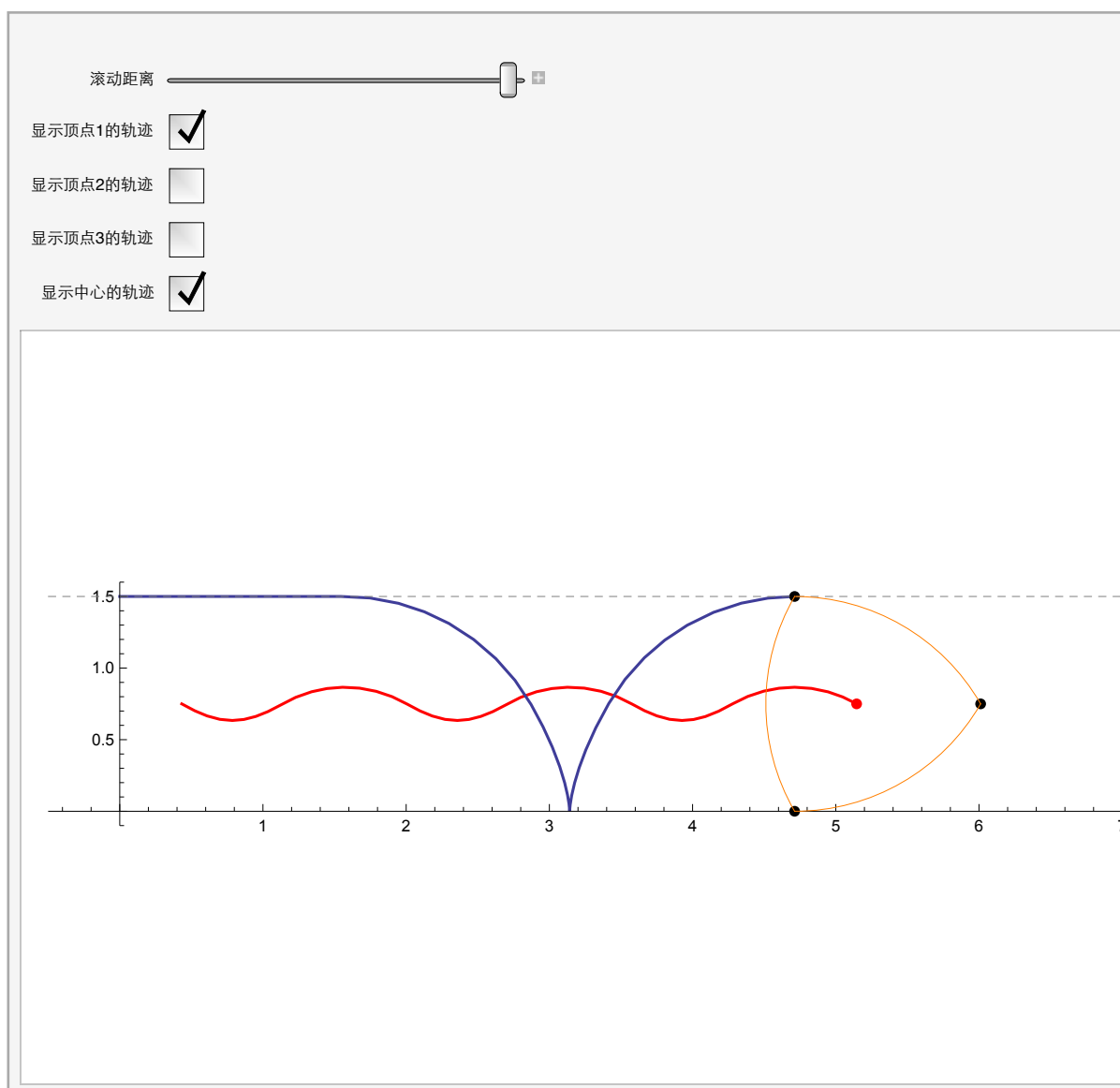
getangle[u_] := ArcTan[First[u], Last[u]];

```

```

Manipulate[Show[
  ParametricPlot[Evaluate@reuleaux[pt1[s], pt2[s], pt3[s], t], {t, 0, 7 * Pi / 3},
  Epilog → {{Red, PointSize[.01], Point[center[s]]},
    {Black, PointSize[.01], Point[pt1[s]]},
    {Black, PointSize[.01], Point[pt2[s]]},
    {Black, PointSize[.01], Point[pt3[s]]},
    {Gray, Dashed, Line[{{-1, r}, {7, r}}]},
    {Orange, Circle[pt1[s], r,
      anglecheck[{getangle[pt2[s] - pt1[s]], getangle[pt3[s] - pt1[s]]]}]},
    {Orange, Circle[pt2[s], r, anglecheck[{getangle[pt1[s] - pt2[s]],
      getangle[pt3[s] - pt2[s]]]}]}, {Orange, Circle[pt3[s], r,
      anglecheck[{getangle[pt1[s] - pt3[s]], getangle[pt2[s] - pt3[s]]]}]}},
  ImageSize → {425, 250},
  PlotRange → {{-.5, 7}, {- .1, 1.6}},
  PerformanceGoal → "Speed", MaxRecursion → 1],
  ParametricPlot[Evaluate@If[ctrQ, 1, 0] * center[t], {t, 0, s + .001},
  PlotStyle → Directive[Red], PerformanceGoal → "Speed", MaxRecursion → 1],
  ParametricPlot[Evaluate@If[pt1Q, 1, 0] * pt1[t],
  {t, 0, s + .001}, PlotStyle → Directive[ColorData[1, 1]],
  PerformanceGoal → "Speed", MaxRecursion → 1],
  ParametricPlot[Evaluate@If[pt2Q, 1, 0] * pt2[t],
  {t, 0, s + .001}, PlotStyle → Directive[ColorData[1, 2]],
  PerformanceGoal → "Speed", MaxRecursion → 1],
  ParametricPlot[Evaluate@If[pt3Q, 1, 0] * pt3[t], {t, 0, s + .001},
  PlotStyle → Directive[ColorData[1, 3]], PerformanceGoal → "Speed",
  MaxRecursion → 1], ImageSize → {600, 390}],
  {{s, 0, "滚动距离"}, 0, 2 Pi, 0.01 Pi},
  {{pt1Q, True, "显示顶点1的轨迹"}, {True, False}, ImageSize → Small},
  {{pt2Q, False, "显示顶点2的轨迹"}, {True, False}, ImageSize → Small},
  {{pt3Q, False, "显示顶点3的轨迹"}, {True, False}, ImageSize → Small},
  {{ctrQ, True, "显示中心的轨迹"}, {True, False}, ImageSize → Small},
  SaveDefinitions → True, AutorunSequencing → {1}
]

```



勒洛三角形在滚动时高度不变，这就证明了勒洛三角形是等宽曲线。同时可以留意到，与圆的滚动不同的是，勒洛三角形的中心在滚动时的轨迹不是一条直线，而是一条正弦曲线；其余顶点的轨迹则由平行于x轴的直线与圆弧组合而

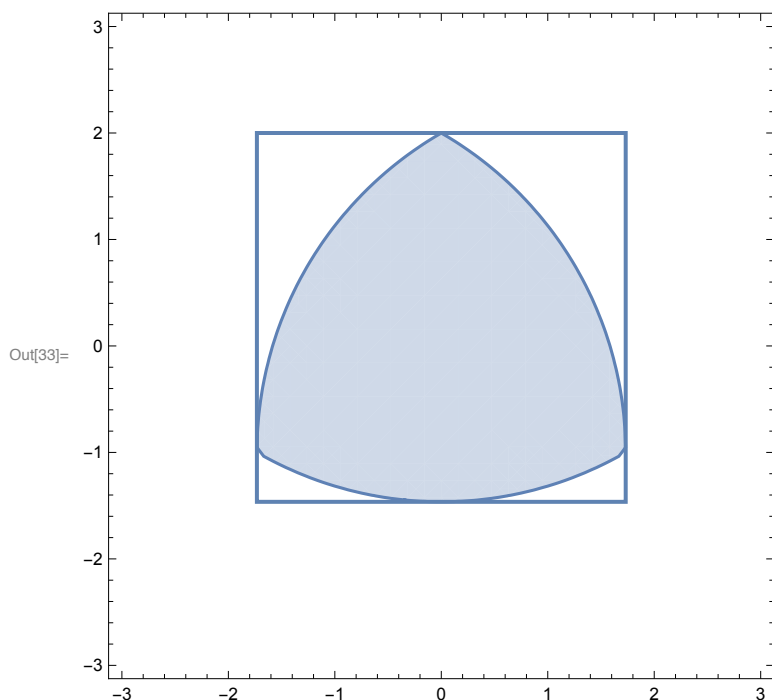
成。利用这个性质，可以用截面为勒洛三角形的直柱体运输木板。  
(参考程序：[1])

## 勒洛三角形在正方形内的旋转运动

### 勒洛三角形内切于正方形

由于勒洛三角形是一种等宽曲线，显然它能够内切于一个边长为其宽度的正方形：

```
In[33]:= Show[normalPlot, Graphics[
  {FaceForm[Opacity[0]], EdgeForm[{Thickness[.006], RGBColor[0.37, 0.51, 0.7]}],
  Rectangle[{- $\sqrt{3}$ , 2 - 2 $\sqrt{3}$ }, { $\sqrt{3}$ , 2}]}]]]
```

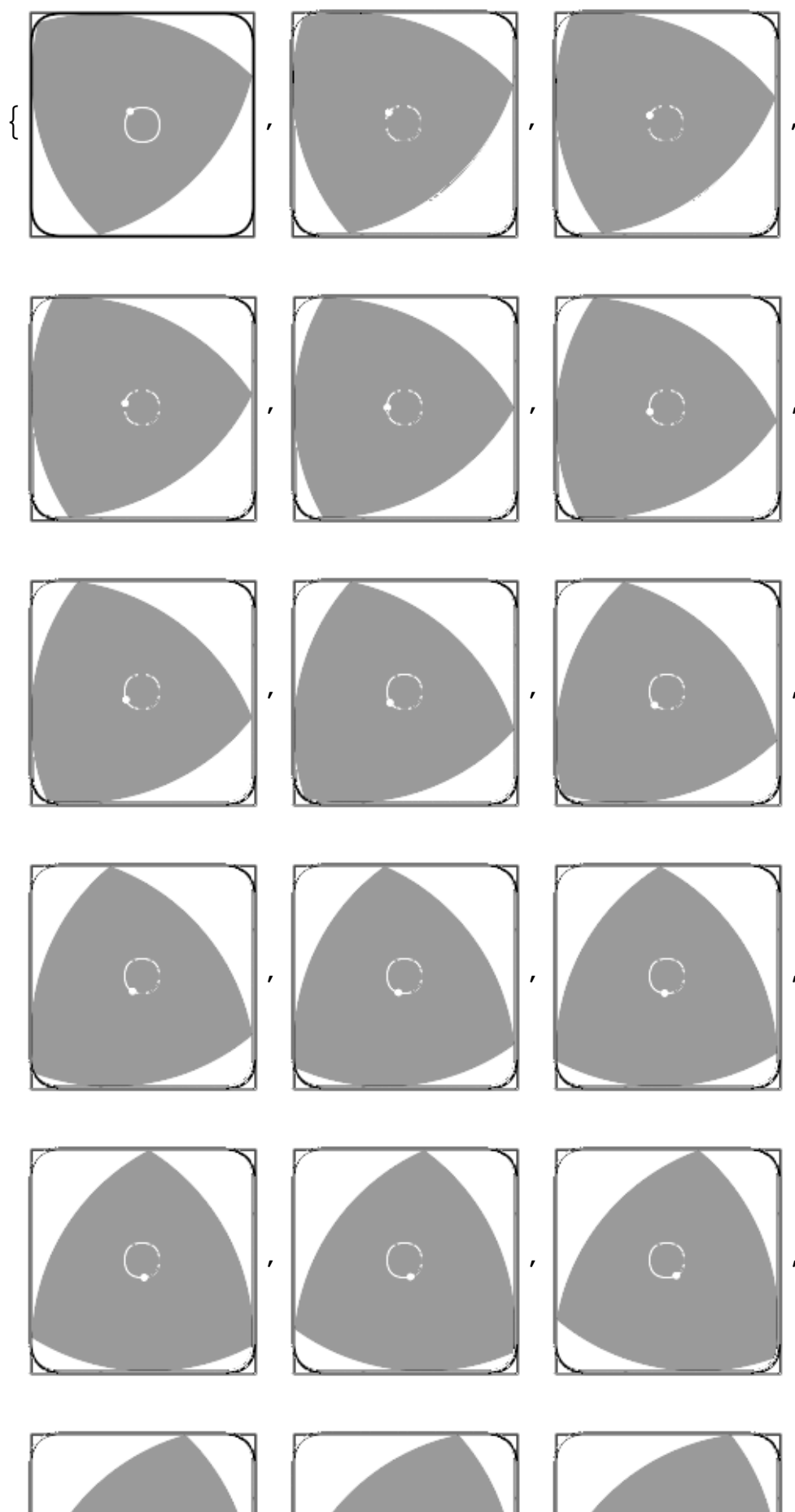


### 勒洛三角形在正方形内的旋转

显然，对于边长为 $a$ 的正方形，宽度为 $a$ 的内切勒洛三角形不是唯一的，它们共同构成一个无限集合，对应宽度为 $a$ 的内切勒洛三角形在正方形内的旋转运动中的每个状态。

勒洛三角形在正方形内旋转时，三个顶点落在不同的三条边上，整个图形与正方形有四个或五个切点。

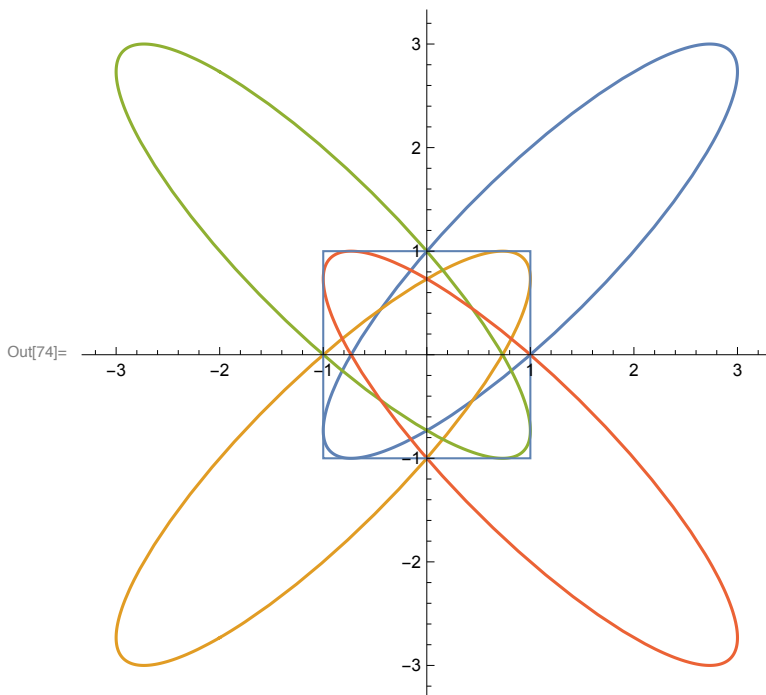




在正方形内旋转的勒洛三角形。图片来源: [10]

利用勒洛三角形的这个性质，可以利用形状为勒洛三角形的钻头钻出接近正方形的孔，用于金属、木材加工等领域。然而从上图中我们可以看到，勒洛三角形旋转时扫过的区域不是完美的正方形，其中心在旋转时也不是静止的，而是有一条形状类似于超椭圆的轨迹。

```
In[74]:= Show[ParametricPlot[{ {1 - Cos[t] -  $\sqrt{3}$  Sin[t], 1 - Sin[t] -  $\sqrt{3}$  Cos[t]},
  {-1 - Cos[t] -  $\sqrt{3}$  Sin[t], -1 - Sin[t] -  $\sqrt{3}$  Cos[t]},
  {-1 - Cos[t] +  $\sqrt{3}$  Sin[t], 1 - Sin[t] +  $\sqrt{3}$  Cos[t]},
  {1 - Cos[t] +  $\sqrt{3}$  Sin[t], -1 - Sin[t] +  $\sqrt{3}$  Cos[t]}}, {t, 0, 2 Pi}], Graphics[
  {FaceForm[Opacity[0]], EdgeForm[{Thickness[.003], RGBColor[0.37, 0.51, 0.7]}],
  Rectangle[{-1, -1}, {1, 1}]}]
```

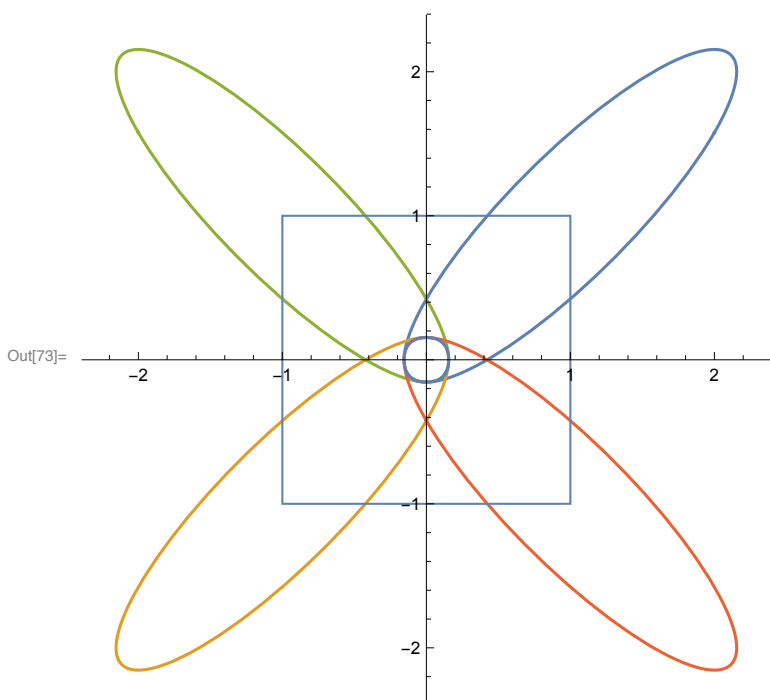


勒洛三角形旋转时扫过的区域是由一个正方形加上四个椭圆的一部分作为角组合而成的。

```

In[73]:= Show[ParametricPlot[{{1 + Cos[t] +  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  Sin[t], 1 + Sin[t] +  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  Cos[t]},
 $\{-1 + \cos[t] + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin[t], -1 + \sin[t] + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos[t]\}$ ,
 $\{-1 - \cos[t] + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin[t], 1 - \sin[t] + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos[t]\}$ ,
 $\{1 - \cos[t] + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin[t], -1 - \sin[t] + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos[t]\}$ }, {t, 0, 2 Pi}],
ContourPlot[Abs[ $\frac{x}{2\sqrt{3}/3-1}$ ]2.36185 + Abs[ $\frac{y}{2\sqrt{3}/3-1}$ ]2.36185 == 1,
{x, -1, 1}, {y, -1, 1}], Graphics[
{FaceForm[Opacity[0]], EdgeForm[{Thickness[.003], RGBColor[0.37, 0.51, 0.7]}],
Rectangle[{-1, -1}, {1, 1}]}]]

```



勒洛三角形旋转时其几何中心的轨迹由四条椭圆弧组成，可以用一个超椭圆进行逼近，其方程为

$$\left| \frac{x}{a} \right|^r + \left| \frac{y}{a} \right|^r = 1, \text{ 其中参数 } a = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}, r = 2.36185.$$

## 勒洛三角形的推广

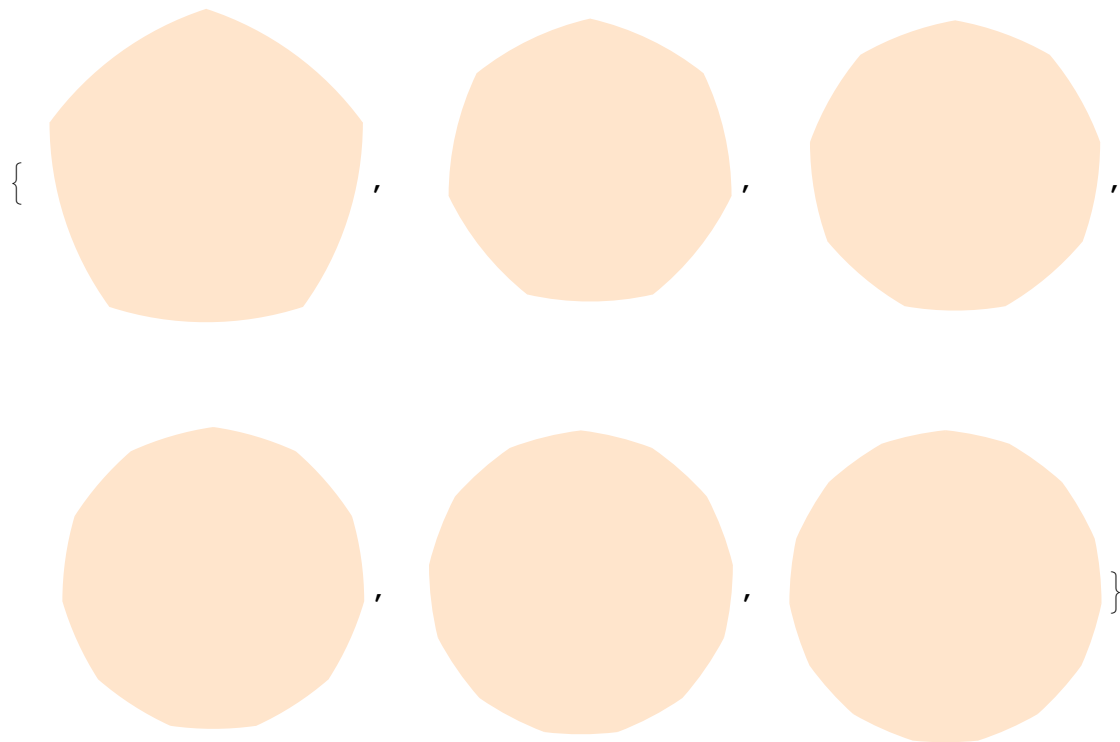
### 勒洛多边形

勒洛多边形 (Reuleaux polygon) 可以由任意奇数边的正多边形构造而成 (偶数边的正多边形的顶点没有对边, 因而无法构成), 其中勒洛三角形是边数  $n=3$  时的特殊情况。

有趣的是, Barbier's theorem (Joseph-Émile Barbier, 1860) 指出, 当等宽曲线的宽度一定 (设为  $s$ ) 时, 它们的周长相等, 即  $C = \pi s$ 。利用 Blaschke-Lebesgue theorem 可以证明勒洛三角形是其中

面积最小的，其面积  $S = \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})s^2$ 。利用勒洛三角形的这一性质，可以制造勒洛三角形形状的井盖以节省材料，同时和圆形井盖一样不会掉进井里。

```
Table[
Graphics[{LightOrange, Table[{Rotate[Disk[{r * Sin[2 Pi / j], r * Cos[2 Pi / j]],
(r + r * Cos[Pi / j]) / Cos[Pi / j / 2], {(j / 2 + (j - 5) / 2 * 1 / 2) * (2 Pi / j),
(j / 2 + 1 / 2 + (j - 5) / 2 * 1 / 2) * (2 Pi / j)}]},
i * (2 Pi / j), {0, 0}]], {i, 1, j}]]], {j, 5, 15, 2}]
```



勒洛 $n$ 边形,  $n=5, 7, 9, 11, 13, 15$ 。

## 勒洛三角形的三维推广

### 勒洛四面体

勒洛四面体(Reuleaux tetrahedron)是勒洛三角形在三维空间的推广。取一个正四面体，分别以四个顶点为球心，其边长为半径作出四个球的相交部分就是勒洛四面体。

```

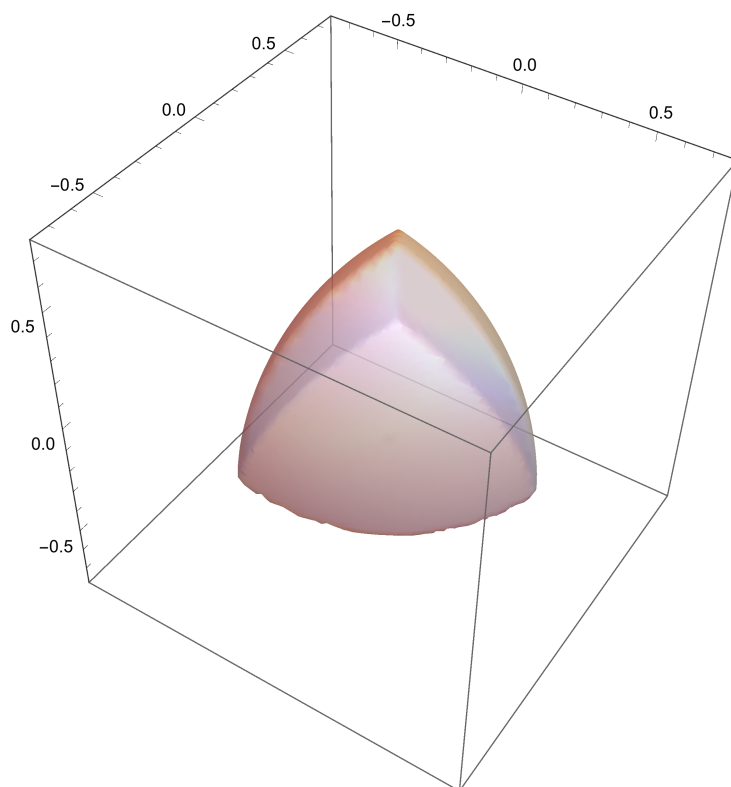
RegionPlot3D[

$$x^2 + y^2 + \left(z - \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2 \leq 1 \ \&\& \ \left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2 \leq 1 \ \&\&$$


$$\left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2 \leq 1 \ \&\& \ \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + y^2 + \left(z + \frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2 \leq 1,$$

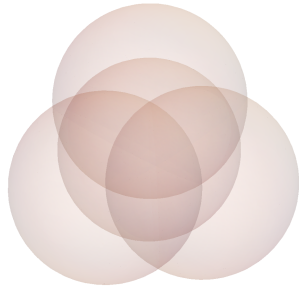
{x, -0.75, 0.75}, {y, -0.75, 0.75}, {z, -0.75, 0.75}, PlotPoints → 60,
PlotStyle → Directive[LightBlue, Opacity[0.6]],
Mesh → None, NormalsFunction → None]

```



一个由四个半径为1的球相交而成的勒洛四面体。

```
Show[Table[RegionPlot3D[f, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, {z, -2, 2}, PlotPoints -> 40,
  PlotStyle -> Directive[LightBlue, Opacity[0.05]], Mesh -> None],
  {f, {x^2 + y^2 + (z - Sqrt[2/3] + 1/(2*Sqrt[6]))^2 <= 1, (x + 1/(2*Sqrt[3]))^2 + (y + 1/2)^2 + (z + 1/(2*Sqrt[6]))^2 <= 1,
    (x + 1/(2*Sqrt[3]))^2 + (y - 1/2)^2 + (z + 1/(2*Sqrt[6]))^2 <= 1,
    (x - 1/Sqrt[3])^2 + y^2 + (z + 1/(2*Sqrt[6]))^2 <= 1}}], Boxed -> False, Axes -> False]
```

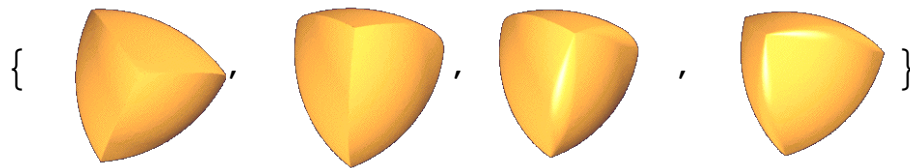


勒洛四面体的构造方法。

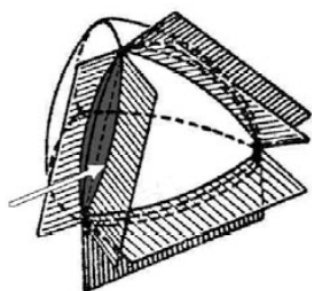
然而违反直觉的是，勒洛四面体并不是一种等宽曲面。这是因为在一个勒洛四面体内，一条棱的中点到对棱的中点的距离比其“宽度”稍大： $\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)s \approx 1.0249s > s$

## Meissner四面体

1911年，德国的Meissner和Schilling将勒洛三角形做了一些修改，使它的其中三条棱更圆滑，被修改后的图形成为了等宽曲面，称作Meissner四面体 (Meissner tetrahedron)。其中，替代原棱的曲面是由边缘的圆弧绕对边旋转而成。



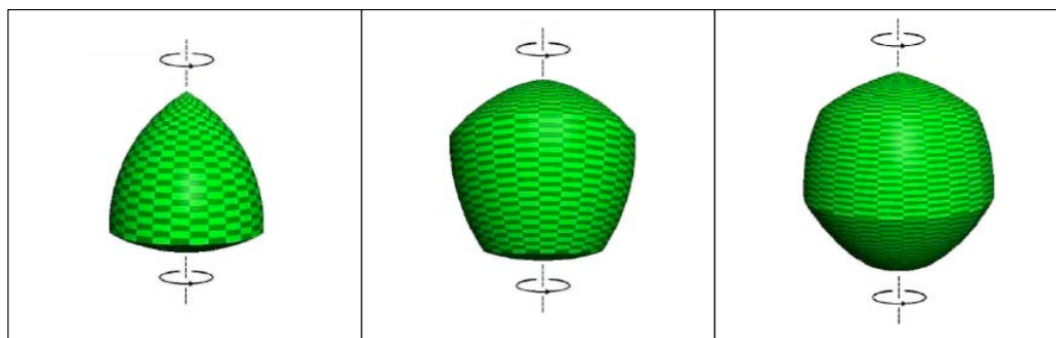
一个Meissner四面体。图片来源：[8]



Meissner四面体其中一个用来替代棱的曲面的构造方法。图片来源：[4]

## 勒洛三角形的旋转体

将一个勒洛三角形绕其对称轴旋转，形成的旋转体是等宽曲面。



勒洛三角形绕其对称轴旋转而成的旋转体是等宽曲面。一个更广泛的结论是，任意勒洛多边形绕其任意一条对称轴旋转而成的旋转体都是等宽曲面。

## 参考资料

1. <http://demonstrations.wolfram.com/ARollingReuleauxTriangle/>
2. [https://en.wikipedia.org/wiki/Reuleaux\\_triangle](https://en.wikipedia.org/wiki/Reuleaux_triangle)
3. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Barbier%27s\\_theorem](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Barbier%27s_theorem)
4. Weber, Christof (2009). "What does this solid have to do with a ball?"([http://www.swisseduc.ch/mathematik/geometrie/gleichdick/docs/meissner\\_en.pdf](http://www.swisseduc.ch/mathematik/geometrie/gleichdick/docs/meissner_en.pdf))
5. Weisstein, Eric W (2008), Reuleaux Tetrahedron, *MathWorld* - Wolfram Web Resource
6. [https://en.wikipedia.org/wiki/Reuleaux\\_tetrahedron](https://en.wikipedia.org/wiki/Reuleaux_tetrahedron)
7. <http://demonstrations.wolfram.com/MeissnerTetrahedra/>
8. <http://www.lama.univ-savoie.fr/~lachand/Spheroforms.html>
9. Howard L. Resnikoff (2013), On Curves and Surfaces of Constant Width, <http://arxiv.org/abs/1504.06733>
10. [https://en.wikipedia.org/wiki/Reuleaux\\_triangle#/media/File:Rotation\\_of\\_Reuleaux\\_triangle.gif](https://en.wikipedia.org/wiki/Reuleaux_triangle#/media/File:Rotation_of_Reuleaux_triangle.gif)